MA1 – přednáška 16.10.2019

Shrnutí minulé přednášky – „pravidla" pro „skládání" limit –

– 1) aritmetika limit – limity $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$

(a odtud neurčité výrazy „$\infty-\infty$", „$0.\infty$", „$\frac{0}{0}$" a „$\frac{\infty}{\infty}$")

2) limita složené funkce

Dnes ještě několik dalších příkladů.

Odtud dostáváme důležité tvrzení o spojitosti funkce (v bodě).

Připomeneme:

Definice. f je definovaná v $U(a)$ (resp. v $U^+(a)$, resp. $U^-(a)$).
f je spojitá v bodě a (resp. v bodě a zprava, resp. zleva), když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$).

A tedy odtud a z pravidel pro „výpočet" limit:

Věta: 1) f je spojitá v bodě a, g je spojitá v bodě a, pak i funkce $f+g$, $f\cdot g$ jsou spojité v a; je-li $g(a)\neq 0$, pak i $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v a.

2) je-li g spojitá v bodě a, f je spojitá v bodě $g(a) = b$, pak i funkce $f(g(x))$ je spojitá v bodě a.

Analogicky pro spojitost zleva (resp. zprava) – promyslete.

Další řešení příkladu – limity a odtud grafu funkce

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

(viz minulá přednáška)

A (zatím) poslední „pomoc" pro určení limity funkce – – vhodné pro funkce, jejichž „část" limitu nemá, nebo pro takové neurčité výrazy, které nedokážeme upravit tak, abychom po úpravě už limitu mohli najít.

<u>Věta o limitě sevřené funkce</u> – viz minulou přednášku. (budeme „označovat" VOS) (věta o strážnících)

<u>Další příklady užití této věty</u>:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)} = „\frac{1+0}{1-0}" = 1$$

$?$ „$\frac{\infty}{\infty}$" – odhodli jsme, že $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x) = +\infty$ –

– jak „přesněji"?

$x+\sin x \geqq x-1$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, tj. i v $P(+\infty)$ $\Big\}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ (AL)

$\underset{\text{(zřejmé)}}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x) = +\infty$

<u>Věta analogická VOS pro nevlastní limity</u>:

<u>Věta</u>. Nechť 1) $f(x) \geqq g(x)$ v $P(a)$ ($P^+(a)$, resp. $P^-(a)$)

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a-} g(x) = +\infty$.

Pak ex. i $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$) a

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$)

Analogicky (pro jednostranné limity pozměněte)

<u>Věta</u>: 1) $f(x) \leqq g(x)$ v $P(a)$

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$

Potom i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

<u>Příklad</u>: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\sin x)$

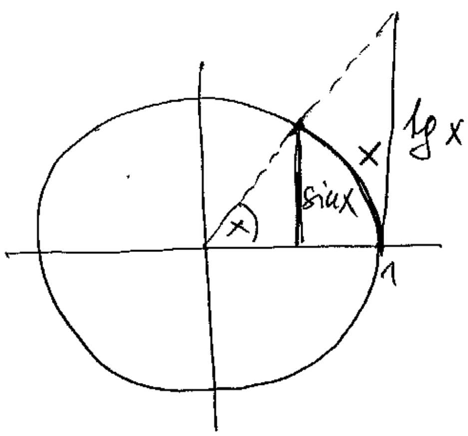
1) $2+\sin x \geqq 1 \Rightarrow$ (x>0 stačí pro $x\to+\infty$) $\left. x(2+\sin x) \geqq x \text{ pro } x>0 \right\} \Rightarrow$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\sin x) = +\infty$

Věta o limitě sevřené funkce se „hodí" i u takových neurčitých výrazů, které nemůžeme upravit a zjednodušit tak, jak minule, užijeme pak „zjednodušení pomocí strážníků", které najdeme pomocí vlastností funkcí, které jsou v limitě „obsaženy"

<u>Příklad</u>: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$ „$\frac{0}{0}$" – ale nejde „nějak „nuly" najít a zkrátit" – najdeme strážníky (z „definice" funkce sinus)



(stačí vyšetřit limitu pro $x\to 0+$, $\frac{\sin x}{x}$ je funkce sudá)

„z obrázku" odhad:

pro $x>0$ $\quad x \geqq \sin x \Rightarrow (x>0)$

(1) $\quad 1 \geqq \frac{\sin x}{x}$

dále: $x \le \operatorname{tg} x$, tj. $x \le \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x > 0, x > 0$

$$\Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x}$$

tj. v $P^+(0)$ je: $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$

$\left.\begin{array}{l} \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1 \text{ (spojitost)}, \quad \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ VOS

! tj. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(= \lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} \right)$

(důležitá limita)

a odtud

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \,\text{„}=\frac{0}{0}\text{“}= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} \underset{AL}{=} 1\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \text{„}1^2\cdot\frac{1}{2}\text{“} = \frac{1}{2}$$

Poznámka: (u limit typu $\frac{0}{0}$, kde se vyskytují goniometrické funkce – hledejte zde schovanou limitu $\frac{\sin x}{x}$ pro $x\to 0+$)

Př. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \text{„}1\cdot\frac{1}{0+}\text{“} = +\infty$

(T + VLSF)

$\left(\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0+\right)$

Další důležitý příklad.

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (2)

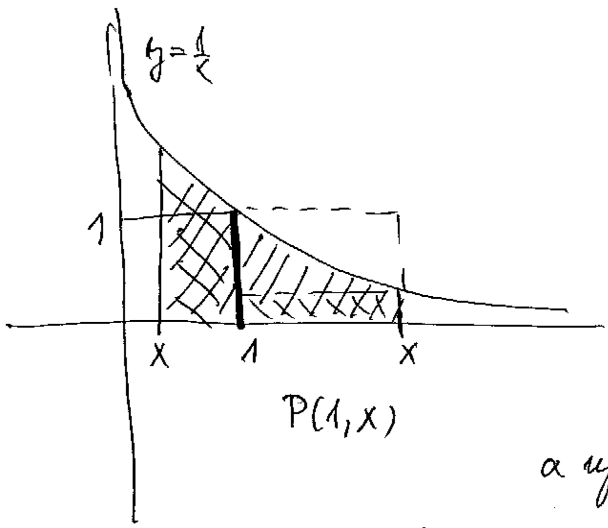
(2) už plyne z (1) – užitím VOLSF + pojmu inverzní fce:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\ln y} = \lim_{y\to 1}\frac{1}{\frac{\ln y}{y-1}} = \underline{\underline{1}}$$

$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

$x\to 0 \Rightarrow e^x \to 1$ $(=y)$

Stačí teď ukázat $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ – najdeme VOS pomocí vztahu fce $\ln x$ a velikosti plochy „pod" grafem funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ (později – integr. počet)



$x>1$ $\quad \ln x = P(1,x)$

$x=1$ $\quad \ln 1 = P(1,1) = 0$

$0<x<1$ $\quad \ln x = -P(x,1)$

a nyní je „vidět"

pro $x>1$ (analog. udělejte sami pro $0<x<1$):

$$\frac{1}{x}(x-1) \le \ln(x) \le 1\cdot(x-1) \qquad \Big|:(x-1)>0$$

$$\underset{\substack{\to 1\\ x\to 1+}}{\frac{1}{x}} \le \frac{\ln x}{x-1} \le \underset{\substack{\to 1\\ x\to 1+}}{1} \quad \underset{\text{VOS}}{\Rightarrow} \quad \underline{\lim_{x\to 1+}\frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

pro $0<x<1$

$$\ln x = -P(1,x)$$

$$1\cdot(1-x) \le P(1,x) \le \frac{1}{x}(1-x) \qquad \Big|\cdot(-1)$$

$$x-1 \ge -P(1,x) \ge \frac{x-1}{x} \qquad \Big|:(x-1)<0$$

$$\underset{\to 1}{1} \le \frac{\ln x}{x-1} \le \underset{\to 1}{\frac{1}{x}} \quad \text{v } P^-(1) \quad x\to 0-$$

$$\underset{\text{VOS}}{\Rightarrow} \quad \underline{\lim_{x\to 0-}\frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

ještě další příklady (výpočet limit „neurčitých výrazů")

1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{x-a}}{(\cancel{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{a}}}$

$\underline{a>0}$

pro $a=0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}} = „\frac{1}{0+}" = +\infty$ (AL)

2) $\displaystyle\underline{\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} =$

$= „\sqrt{1+0}" \underset{\text{VLSF + AL}}{=} \underline{1}$

! **ale pozor** $\displaystyle\underline{\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = „\frac{\infty}{-\infty}" = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}(-1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \underline{-1}$

3) $\displaystyle\underline{\lim_{x\to+\infty}(\sin x - x^2)} = -\infty$, neboť $\sin x - x^2 \le 1 - x^2$
a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-x^2) = -\infty$ (AL)

4) $\displaystyle\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right) \underset{\text{VLSF + „takové"}}{=} „1\cdot 3" = 3$

5) $\displaystyle\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^3}} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{x^2}\right) = „1\cdot\frac{3}{0+}" = +\infty$

6) $\displaystyle\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}(1-e^{-2x})}{\cancel{e^x}(1+e^{-2x})} \underset{\text{AL}}{=} 1$

$\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0\right)$

analog. (zkuste sami) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = -1.$

Před formulací definic (přesných) jednostranných „druhů" limit jsou další důležitá tvrzení o limitě funkce (a i o spojitosti funkce v bodě)

<u>Věta</u>: 1) $\lim\limits_{x\to a(\pm)} f(x) = L \quad (a\in\mathbb{R}^*, L\in\mathbb{R}^*) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a(\pm)} |f(x)| = |L|$

(kde $|\infty|=\infty$, $|-\infty|=\infty$)

2) $\lim\limits_{x\to a(\pm)} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a(\pm)} |f(x)| = 0$

(užitečné někdy pro VOS)

„<u>Uspořádání limit</u>":

<u>Věta</u>. a) 1) $f(x) \leqq g(x)$ v $P(a)$
2) existují $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

$\Big\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

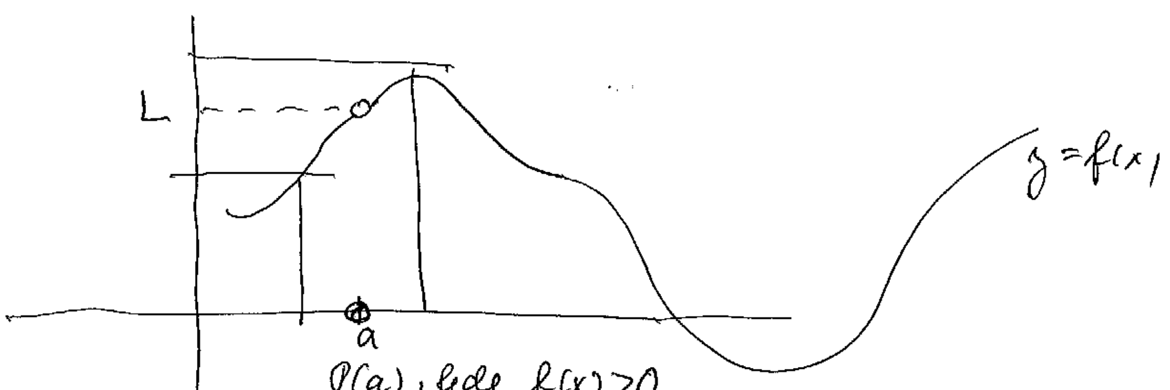
b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x) \Rightarrow \exists\, P(a)\ \forall x\in P(a):\ f(x)<g(x)$

„Užitečný" důsledek b):

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0 \Rightarrow \exists\, P(a):\ f(x)>0$ v $P(a)$

a f je spojitá v bodě a, $f(a)>0 \Rightarrow$ ex. $U(a)$ takové, že $f(x)>0$ v $U(a)$

(analog. pro jednostranné limity)



P(a), kde f(x) > 0

Nyní se pokusíme o definice jednotlivých „typů limit“
(učíme se „matematičtinu“)

? Co jistě k definicím limity funkce (a tedy pak i k definici spojitosti funkce v bodě) budeme potřebovat? –
– Co „znamená“ $x \to a$ (x se „blíží“ k $\underline{a}$), $a \in \mathbb{R}$,
$(x \to a+,\ x \to a-)$
a analogicky – co znamená (jak přesně zapsat) „$f(x) \to L$“ $(L \in \mathbb{R}, \pm\infty)$

<u>Potřebujeme v R vzdálenost</u> (dvou čísel – bodů na reálné ose?)

<u>Definice</u>: $a, b \in \mathbb{R}$, pak vzdálenost bodů $d(a,b)$ definujeme:
$$d(a,b) = |b - a|$$

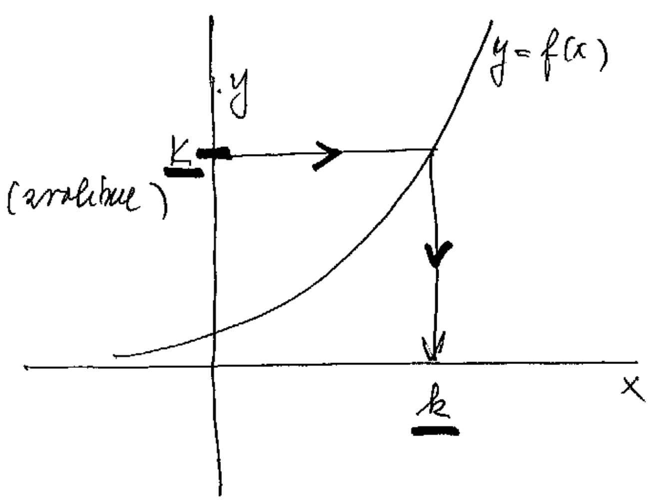
Pak pro libovolné body $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí (důležité vlastnosti vzdálenosti)

1) $d(a,b) \geqq 0$, $d(a,b) = 0 \iff a = b$
2) $d(a,b) = d(b,a)$
3) $d(a,b) \leqq d(a,c) + d(c,b)$
(trojúhelníková nerovnost)

Pak lze okolí bodu $\underline{a}$ zapsat:
$a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$:
$$U(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R};\ |x-a| < \delta\}$$
$$P(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x-a| < \delta\}$$

A nyní „přesné“ definice limity funkce:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



Když zvolíme libovolně vysoko K (stačí $K>0$), pak musí „už" (dost daleko třeba) „také" k, že v intervalu $(k,+\infty)$ je už $f(x)>K$

tj. k libovolnému K existuje k (>0 stačí) takové, že pro $x>k$ je $f(x)>K$

Stručný (a přesný) zápis užitím kvantifikátorů:

__Definice__: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, když platí:

$$\boxed{\forall K (>0)\ \exists k\ \forall x>k : f(x)>K}$$

(také lze $\quad \forall x: \ x>k \Rightarrow f(x)>K$)

Lze také zapsat pomocí okolí:

$$\forall O(+\infty)\ \exists O(+\infty)=(k,+\infty)\ \forall x\in(k,+\infty): f(x)\in(K,+\infty)]$$

__Př.__ Zkusme ukázat (ověřit) z definice, že $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

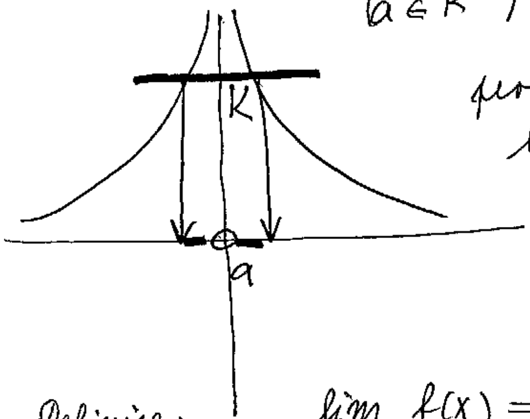
tj. musíme ukázat, že když zvolíme lib. K (>0), pak najdeme k tak, že když $x>k$, je už $x^2>K$:

__Zvolíme tedy $K(>0)$ – hledejme k__ :

má-li být $x^2>K$ (>0), pak stačí $x>\sqrt{K}$, tj. lze zvolit $k=\sqrt{K}$:

ověření: $\underset{(>0)}{x>\sqrt{K}} \Rightarrow x^2>K$ cbd.

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(a\in\mathbb{R})$ – opět „umíme se dostat lib. vysoko" někde „blízko" kolem a



pro $\forall K(>0)$ najdeme prstencové okolí $P(a,\delta)$ kolem a tak, že platí:

$$x\in P(a,\delta) \Rightarrow f(x)>K$$

Definice: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$:

$$\forall K(>0)\ \exists \delta>0\ \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>K,$$ tzn.

$$\forall P(\infty)\ \exists P(a,\delta)\ \forall x\in P(a,\delta):\ f(x)\in P(+\infty)$$

(analog. pro $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=+\infty$)

Př. ? $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \iff$? $\forall K(>0)\ \exists\delta>0\ \forall x:$

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>K$$

zvolme teď $K(>0)$ a hledejme $\delta>0$:

má-li být $\frac{1}{(x-1)^2} > K > 0$, pak $(x-1)^2 < \frac{1}{K}$ a (obráceně)

$$x\neq 1 \text{ a } |x-1| < \frac{1}{\sqrt{K}},$$

tj. $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$

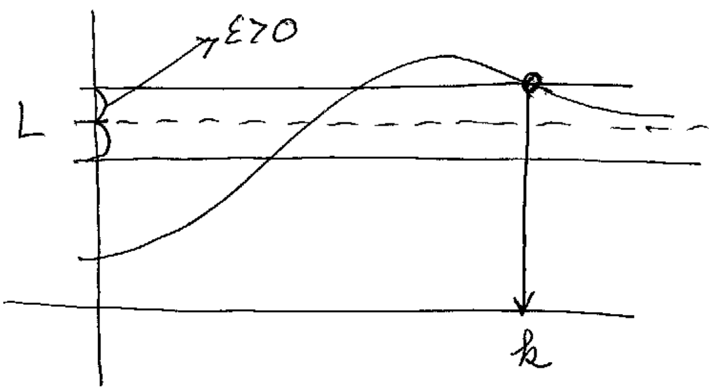
Analogicky se definuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ $(a\in\mathbb{R})$ – zkuste!

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \quad (L\in\mathbb{R})$

zde „nový" problém – musím se přiblížit libovolně blízko bodu L s funkčními hodnotami $f(x)$, pokud budu „dost" daleko na ose x –

– ale zvod ne „uvnitř" –

– k libovolně malému okolí $\mathcal{U}(L,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ najdu okolí ∞ $(= (k,+\infty))$ tak, že pro $x\in(k,+\infty)$ je $f(x)\in\mathcal{U}(L,\varepsilon)$



Definice:

Pomocí kvantifikátorů (a okolí)

$\forall\, \mathcal{U}(L,\varepsilon)\ \exists\, P(\infty)\ \forall x\in P(\infty):\ f(x)\in\mathcal{U}(L,\varepsilon)$

Pomocí vzdálenosti: $\forall \varepsilon>0\ \exists k\ \forall x>k:\ |f(x)-L|<\varepsilon$

Jednoduchý příklad:

? $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3x+1} = 0 \Leftrightarrow$? $\forall\varepsilon>0\ \exists k(>0)\ \forall x>k:$

$\left|\frac{1}{3x+1}\right| < \varepsilon$ a úpravou

pro x taková, že $3x+1>0$ (stačí) (pro $x\to+\infty$)

$3x+1 > \frac{1}{\varepsilon}$

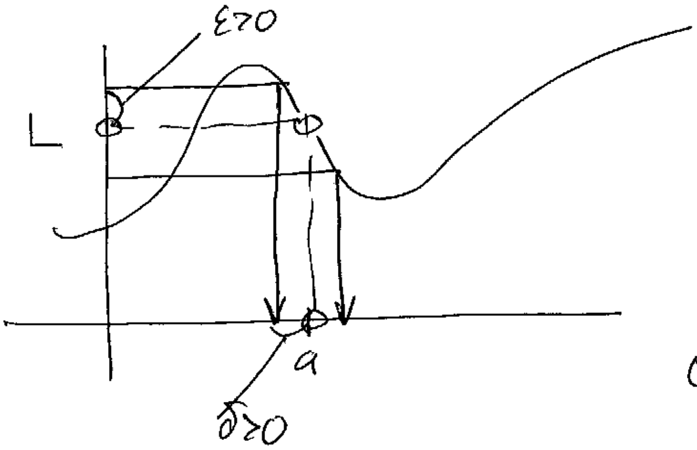
$x > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = k$

(bude-li $\varepsilon<1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}>1$ a $\frac{1}{\varepsilon}-1>0$)

Analogicky – definice $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \quad (L\in\mathbb{R})$

Poslední definice:

(4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \quad , \quad a\in\mathbb{R},\ L\in\mathbb{R}$



$\forall\, U(L,\varepsilon)\ \exists\, P(a,\delta):$

$x\in P(a,\delta) \Rightarrow f(x)\in U(L,\varepsilon)$

nebo:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:$

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Příklad: ? $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=4 \Leftrightarrow$

? $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x \quad |x-1|<\delta \Rightarrow |(3x+1)-4|<\varepsilon$

analýza $\varepsilon>0$!:

má-li být $\quad |3x+1-4|<\varepsilon$

tj. $3|x-1|<\varepsilon$ pak stačí vzít

$|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}=\delta$ (hledané) cbd.

Definice spojitosti funkce f v bodě a $\equiv \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x: \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

(pomocí okolí: $\forall\, U(f(a),\varepsilon)\ \exists\, U(a,\delta):$

$x\in U(a,\delta) \Rightarrow f(x)\in U(f(a),\varepsilon)$